

C

(Printed Pages 8)

Roll No. _____

19/1205

बी.ए./बी.एस-सी. (भाग-1) परीक्षा, 2019

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2019

MATHEMATICS

प्रथम प्रश्न - पत्र

First Paper

(Algebra and Trigonometry)

समय : 3 घण्टे

पूर्णांक : 65

Time : Three Hours

Maximum Marks : 65

नोट : कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रथम प्रश्न अनिवार्य है। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न किया जाना है। प्रत्येक प्रश्न के अंक दाहिनी ओर अंकित हैं।

Note: Answer **five** questions in all. Question **No.1** is **compulsory**. Answer **one** question from each unit. Marks allotted to each question are indicated in the right-hand margin.

P.T.O.

19/1205

नोट : लघु-उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर की अधिकतम सीमा 200 शब्द तथा दीर्घ-उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर की अधिकतम सीमा 500 शब्द है।

Note: The answers to short answer type questions should not exceed 200 words and the answers to long question should not exceed 500 words.

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए : $2\frac{1}{2} \times 10 = 25$

Answer the following questions :

(a) अभिसारी अनुक्रम को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

Define convergence of a sequence with an example.

(b) दर्शाइए कि अनुक्रम $\langle s_n \rangle$ जहाँ $s_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 5}$,

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}$ को अभिसरित होगी।

Show that the sequence $\langle s_n \rangle$ where

$$s_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 5} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ converges to } \frac{1}{2}.$$

(c) किसी समुच्चय के विभाजन को परिभाषित कीजिए।

Define partition of a set.

(d) क्रमचय समूह P_3 के सभी तत्वों को लिखिए।

Write down all elements of Permutation group P_3 .

(e) एक समूह G के उपसमूह H के लिए दर्शाइए कि $H^2=H$

For a subgroup H of a group G , show that $H^2=H$.

(f) गुणन समूह $G=\{1,w,w^2\}$ के सभी तत्वों की कोटि ज्ञात कीजिए।

Find order of all elements of the multiplicative group $G=\{1,w,w^2\}$, where w is a cube root of unity.

(g) एक ऐसे वलय का उदाहरण दीजिए जिसमें गुणात्मक इकाई न हो।

Give example of a ring which has no multiplicative identity.

19/1205

(h) वलयों की समाकारिता को परिभाषित कीजिए।

Define homomorphism of rings.

(i) e^{x+iy} के वास्तविक एवं अधिकल्पित मानों को अलग कीजिए।

Separate into real and imaginary parts of e^{x+iy}

(j) प्रधान मान को लेकर दिखाइए कि $\sin(\log i) = -1$

Taking principal value, prove that

$\sin(\log i) = -1$

इकाई-प्रथम / Unit-I

2. (a) दिखाइए कि प्रत्येक अभिसारी क्रम कोशी क्रम होता है। $2 \times 5 = 10$

Prove that every convergent sequence is a Cauchy sequence.

(b) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1})$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1})$$

अथवा / OR

3. (a) अनन्त श्रेणी $x \log x + x^2 \log 2x + \dots + x^n \log nx + \dots$ के अभिसारिता का परीक्षण कीजिए। $2 \times 5 = 10$

Test the convergence of the following infinite series :

$$x \log x + x^2 \log 2x + \dots + x^n \log nx + \dots$$

- (b) पूर्णाकों के समुच्चय z में तुल्यता सम्बन्ध $a \equiv b \pmod{5}$ के सभी तुल्यता वर्ग ज्ञात कीजिए।

Find all equivalence classes of the equivalence relation $a \equiv b \pmod{5}$ in the set of integers z .

इकाई-द्वितीय / Unit - II

4. (a) चक्रीय समूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि प्रत्येक चक्रीय समूह अबेलियन समूह होता है। $2 \times 5 = 10$

Define cyclic group with example. Prove that a cyclic group is Abelian.

- (b) दिखाइए कि एक समूह के दो उपसमूहों का संघ उपसमूह होता है यदि और केवल यदि एक उपसमूह दूसरे में समाहित हो।

Prove that union of two subgroups of a group is a subgroup if and only if one is contained in the other.

अथवा / OR

5. (a) दिखाइए कि एक क्रमचय समूह में सम और विषम क्रमचयों की संख्या समान होती है।

Prove that in a permutation group number of even permutations is equal to number of odd permutations.

- (b) लाग्रान्ज के प्रमेय के कथन का उल्लेख करते हुए उसे सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's theorem.

इकाई-तृतीय / Unit-III

6. (a) एक समूह के केन्द्र को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि समूह का केन्द्र, सामान्य उपसमूह होता है।

$$2 \times 5 = 10$$

Define centre of a group. Prove that centre of a group is a normal subgroup.

- (b) समूहों की समाकारिता के आधारभूत प्रमेय का कथन देते हुए उसे सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem of group homomorphism.

अथवा / OR

7. (a) एक वलय R में निम्नलिखित कथनों को सिद्ध कीजिए-

Prove the following in a ring :

(i) $a \cdot 0 = 0 \forall a \in R$

(ii) $(-a) \cdot b = -ab = a(-b)$

- (b) दिखाइए कि एक क्षेत्र, पूर्णाकीय प्रान्त होता है। क्या इसका व्युत्क्रम सही है?

Prove that a field is an integral domain.

Is its converse true?

इकाई-चतुर्थ / Unit - IV

8. (a) यदि $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \dots (a_n + ib_n) = A + iB$ तो सिद्ध कीजिए-

(i) $\tan^{-1} \frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2} + \dots + \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} = \tan^{-1} \frac{B}{A}$

(ii) $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$

If $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \dots (a_n + ib_n) = A + iB$

then prove that

(i) $\tan^{-1} \frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2} + \dots + \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} = \tan^{-1} \frac{B}{A}$

(ii) $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$

19/1205

(b) दिखाइए कि $\tan \left\{ i \log \frac{a-ib}{a+ib} \right\} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$

Prove that $\tan \left\{ i \log \frac{a-ib}{a+ib} \right\} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$

अथवा / OR

9. (a) निम्नलिखित श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए- $2 \times 5 = 10$

Obtain sum of the following series -

$$\cot^{-1}(2 \cdot 1^2) + \cot^{-1}(2 \cdot 2^2) + \cot^{-1}(2 \cdot 3^2) + \dots + \text{ad. inf.}$$

(b) यदि θ का मान $-\pi/4$ से $\pi/4$ के बीच हो अर्थात् $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ तो दिखाइए कि -

$$\theta = \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta - \frac{1}{7} \tan^7 \theta + \dots + \text{ad. inf}$$

If θ lies within the closed interval $[-\pi/4, \pi/4]$ i.e. if $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$

then prove that

$$\theta = \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta - \frac{1}{7} \tan^7 \theta + \dots + \text{ad. inf}$$